RICCATI型の微分方程式の連分数による解 (函数近似の基礎理論研究会報告集)

一松, 信

数理解析研究所講究録
73巻 1969年 55-66

RICCATI 型の微分方程式の連分数による解

立教大 理　一松 信

§0. はしがき.

ここに紹介するのは, Khovanskii の本 [1] の廿章の要約で, 本質的には Lagrange (1776) の考えた手法である. すなわち Riccati 型の常微分方程式の特別な初期値をもつ解を, 方程式の有理変換により同じ形の方程式がえられるようにし, この変換をくりかえして, 連分数の形に表現する手法である. この方法により, 古典的特殊函数の, これまでに知られた連分数展開は, ほとんどすべて統一的に導びくことができる. (もちろん実際には直接に求めた方が早い例も多いが).

§1. 方程式の還元 (1)

もとになる方程式は, つぎのものである:

$$(1)\quad y' = \frac{l}{a+bx} + \left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\mu b}{a+bx} + \frac{\nu f}{c+fx}\right)y - \frac{g y^2}{x(a+bx)(c+fx)},$$

$a, b, c, f, g, l, \lambda, \mu, \nu$ は定数, $a \neq 0$, $c \neq 0$,

$\lambda + \mu + \nu = 1$.

$b/a = \eta'$, $f/c = \eta$, $\lambda = -\beta$, $(\lambda+\nu)\eta + (1-\nu)\eta' = -\beta'$,

$g/ac = \gamma$, $l/a = \delta$ とおくと，(1) は

(2) $(1+\eta x)(1+\eta' x)xy' + (\beta + \beta' x - \eta\eta' x^2)y + \gamma y^2 = \delta x(1+\eta x)$

となる．この節では，以下 $\eta \neq \eta'$ と仮定する．このとき

$A = 1/(\eta'-\eta)$, $B = -\eta'/(\eta'-\eta)$ すなわち

$B + \eta' A = 0$, $B + \eta A = -1$ であるように A, B をきめ，

$x = A\xi/(1+B\xi)$, $y = Y/(1+B\xi)$ とおきかえると (2) は

(3) $$\frac{dY}{d\xi} + \left(\frac{\beta}{\xi} + \frac{\nu}{1-\xi}\right)Y + \frac{\gamma Y^2}{\xi(1-\xi)} = m, \qquad m = \frac{\delta}{\eta'-\eta}$$

となる．ν は (1) の ν と同じである．

ここで s をパラメタとして，Y を

$$Y = -\frac{\beta}{\gamma} + s\xi + \frac{\xi(1-\xi)}{z}$$

により z にかえると，(3) は

(4) $$\frac{dz}{d\xi} + \left(\frac{\beta-1}{\xi} + \frac{1+2\beta-\nu-2\gamma s}{1-\xi}\right)z + \frac{1}{\xi(1-\xi)}\left[m - s(1+\beta-\nu) + \gamma s^2 - \frac{(\gamma s-\beta)(\gamma s-\beta+\nu)}{\gamma(1-\xi)}\right]z^2 = \gamma$$

となる．もし $(\gamma s-\beta)(\gamma s-\beta+\nu) = 0$ ならば，(4) は (3) と同じ形になる．$\gamma s = \beta$ ととれば，(3) のパラメタを β_1, ν_1, γ_1, m_1 とおきかえると，

$\beta_1 = \beta - 1$, $\nu_1 = 1-\nu$, $m_1 = \gamma$, $\gamma_1 = m - \beta(1-\nu)/\gamma$

として，(3)と同じ形の方程式をうる．

以下同じ操作をくりかえすと，(3)のパラメタを β_n, ν_n, γ_n, m_n とした方程式をうる．これらの値は帰納法により

$$(5)\quad \beta_n=\beta-n, \qquad \nu_{2n}=\nu, \qquad \nu_{2n+1}=1-\nu$$

$$\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}=m\gamma+n(n-1-\beta+\nu),$$

$$\gamma_{2n}\gamma_{2n+1}=m\gamma+(n-\beta)(n+1-\nu) \qquad (\gamma_0=\gamma \text{ とおく})$$

をみたすことが示される。これをまとめると，Y が ξ の連分数で表現される．このままでは形式的な展開にすぎないが，えられた連分数に収束判定条件（たとえば[3]の後半）を適用することにより，この連分数が実際に適当に切れ目を入れた複素数平面上で収束することが証明される．それを y と x との関係にもどすと

$$(6)\quad \gamma y=-\beta(1+\eta x)+\frac{m\gamma-\beta(1-\nu)(\eta'-\eta)x\,|}{|\,1-\beta}$$

$$+\mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty}\left[\frac{[m\gamma+n(n-1-\beta+\nu)](\eta'-\eta)x\,|}{|\,(2n-\beta)(1+\eta x)}+\frac{[m\gamma+(n-\beta)(n+1-\nu)(\eta'-\eta)x\,|}{|\,2n+1-\beta}\right]$$

となる．これが(2)の $y(0)=-\beta/\gamma$ をみたす解である．

ここで x を x^k におきかえたりして，いろいろの変形を導くことができる．またパラメタを変換して他の初期値をもつ解も表現できる．

<u>注意．</u> 場所を節約するため，連分数

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

を

$$a_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \quad \text{または} \quad a_0 + \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n|}{|b_n}$$

と記す．a_1，b_1 を別記し，以下を2つずつまとめれば，

$$a_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{2n}|}{|b_{2n}} + \frac{a_{2n+1}|}{|b_{2n+1}} \right]$$

ともみられる．

§2．方程式の還え (2)

(4) において $\gamma s = \beta - \nu$ と選んだときには，(3) のパラメタを $\beta_1, \nu_1, \gamma_1, m_1$ とかきかえると，(4) は

$$\beta_1 = \beta - 1, \quad \nu_1 = 1 + \nu, \quad \gamma_1 = m + (\nu - \beta)/\gamma, \quad m_1 = \gamma$$

として，(3) と同じ形の方程式になる．したがって以下同じ操作をくりかえすと，($\gamma_0 = \gamma$ とおく)

(7) $\beta_n = \beta - n$，$\nu_n = n + \nu$，$\gamma_n \gamma_{n+1} = m\gamma + (n+1)(n+\nu-\beta)$

という関係式をうる．前と同様にして Y, ξ を x, y にもどすと

$$(8)\quad \gamma y = -\beta + [(\nu-\beta)\eta - \nu\eta']x + \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Phi}} \frac{[m\gamma + n(n-1+\nu-\beta)](\eta'-\eta)x(1+\eta x)|}{|\, n-\beta+[(2n+\nu-\beta)\eta-(n+\nu)\eta']x}$$

をうる．ただし (8) を求めるにあたって，関係式，

$$(n-\beta)\eta' = (2n+\nu-\beta)\eta - (n+\nu)\eta',$$

$$-\beta\eta' + (\beta-\nu)(\eta'-\eta) = (\nu-\beta)\eta - \nu\eta'$$

に注意する．

$\eta=\eta'$ のときには，はじめの関係式から

$$m\gamma = \gamma\delta/(\eta'-\eta), \qquad \nu = (\beta'+\eta'-\beta\eta)/(\eta'-\eta)$$

なので，$\eta'\to\eta$ とした極限をとると，(6)，(8) はそれぞれつぎのようになる．

$$(6')\quad \gamma y = -\beta(1+\eta x) + \frac{[\gamma\delta + \beta(\beta'+\eta-\beta\eta)]x|}{|\, 1-\beta}$$

$$+\overset{\infty}{\underset{n=1}{\Phi}}\left[\frac{[\gamma\delta+n(\beta'+\eta-\beta\eta)]x|}{|\,(2n-\beta)(1+\eta x)} + \frac{[\gamma\delta-(n-\beta)(\beta'+\eta-\beta\eta)]x|}{|\, 2n+1-\beta}\right]$$

$$(8')\quad \gamma y = -\beta - (\beta'+\eta)x + \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Phi}} \frac{[\gamma\delta+n(\beta'+\eta-\beta\eta)]x(1+\eta x)|}{|\, n-\beta+[(n-1)\eta-\beta']x}.$$

§ 3. 応用例 1.

(2) で $\delta=0$ の同次形の場合には，Bernoulli の方程式であり，

$1/y = z$ とおきかえると，線型になって，求積法でとける。
定数をあわせると，その解は

$$(9)\quad \gamma y = \frac{x^{-\beta}(1+\eta x)^{\nu}(1+\eta' x)^{\mu}}{\int_0^x x^{-\beta-1}(1+\eta x)^{\nu-1}(1+\eta' x)^{\mu-1}\,dx}$$

$$(\mu = 1+\beta-\nu)$$

の形になる。これが(6)あるいは(8)の連分数で表現できる。
たとえば，$\eta' = 0$，$\eta = 1$，$\beta = -1$ とおけば，

$$(10)\quad \gamma y = \frac{\nu x(1+x)^{\nu}}{(1+x)^{\nu}-1}$$

となり，(6)を使えば，連分数展開

$$(1+x)^{\nu} = \frac{1\,|}{|\,1} - \frac{\nu x\,|}{|\,1+x} + \Phi_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{n(n-\nu)x\,|}{|\,2n} - \frac{n(n+\nu)x\,|}{|\,(2n+1)(1+x)}\right]$$

をうる。またこの部分和の漸化式をまとめかえて

$$(11)\quad \nu x\frac{(1+x)^{\nu}+1}{(1+x)^{\nu}-1} = \nu x + \frac{2\nu x}{(1+x)^{\nu}-1}$$

$$= 2+x+\Phi_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu^2-n^2)x^2\,|}{|\,(2n+1)(2+x)}$$

をうる。変数をおきかえて，$(2+x)/x$ を x とすると，

$$(12)\quad \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\nu} = 1 + \frac{2\nu}{x-\nu} + \Phi_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu^2-n^2)\,|}{|\,(2n+1)x}$$

が導びかれる。これらの極限として，つぎのような連分数展

開がえられる.

(13) $\arctan\frac{1}{x} = \frac{1|}{|x} + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\Phi}} \frac{n^2|}{|(2n+1)x}$, $\left[\left(\frac{ix+1}{ix-1}\right)^{i\nu} = \exp\left(2\nu \arctan\frac{1}{x}\right)\right.$ により, $\nu \to 0$ とする.$\left.\right]$

(14) $\log(1+x) = \frac{x|}{|1+x} + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\Phi}} \left[-\frac{nx|}{|2} - \frac{nx|}{|(2n+1)(1+x)}\right]$ ((10) で $\nu \to 0$ とする.)

(15) $e^x = \frac{1|}{|1} - \frac{x|}{|1+x} - \underset{n=1}{\overset{\infty}{\Phi}} \frac{nx|}{|n+1+x}$ ((10) で $\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu} = e^x$ を利用)

§4. 応用例 2.

$y = \tan x$ は $y' = 1+y^2$, $y(0)=0$ をみたす函数である.

$y = x/z$ とおきかえると $z(0)=1$

$$xz' - z + z^2 = -x^2$$

となる. これは (2) で x を x^2 にかえ, $\alpha = \alpha' = \beta' = 0$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 1/2$, $\delta = -1/2$ とおいた場合に相当するので, これから z の連分数展開をうる. もとにかえせば

(16) $\tan x = \frac{x|}{|1} - \underset{n=1}{\overset{\infty}{\Phi}} \frac{x^2|}{|2n+1}$

となる. これは Lambert (1770) の有名な式で, 彼はこれから π が無理数であることをはじめて証明した.

$y = \arctan x$ は $y' = 1/(1+x^2)$, $y(0)=0$ をみたす.

同様に $y = x/z$, $z(0)=1$ とおきかえると,

(2)で x を x^2 にかえ, $\eta=0$, $\eta'=1$, $\beta=\beta'=-1/2$, $\gamma=1/2$, $\delta=0$ とした場合の方程式をうる. その結果は奇数番と偶数番とが同じ式になり, (13)と同じ公式をうる. $1/x$ を x に直せば, つぎのようになる.

(13') $$\arctan x = \frac{x}{\lfloor 1} + \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^2}{\lfloor 2n+1}.$$

§5. 応用例 3.

はじめの方程式で x を x^k にかえ, $\eta=\eta'=\beta'=0$ とすると, (α, γ, δ をかきかえて), Booleの方程式

(17) $$\alpha x y' + \beta y + \gamma y^2 = \delta x^k$$

をうる. 初期条件を $y(0)=0$ とすれば, $\gamma u = \gamma y + \beta$ として u の方程式を作り, その連分数をもとにかえせばよく,

$$y = \frac{1}{\gamma} \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma\delta x^k}{\lfloor nk\alpha+\beta}$$

をうる. 初期条件 $y(0)=-\beta/\gamma$ の解は次のようになる.

$$y = -\frac{\beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma\delta x^k}{\lfloor nk\alpha-\beta}$$

さて2階の同次線型常微分方程式

$$f_2(x)z'' + f_1(x)z' + f_0(x)z = 0$$

があれば, $z=\exp\left[\int y\,dx\right]$, すなわち $y=z'/z$ とおくと,

(18) $$y' = -(f_0/f_2) - (f_1/f_2)y - y^2$$

となる．(18) が (17) の形になるのは，$f_2(x) = 1$ とすると，

$$f_0(x) = -(\delta/\alpha)x^{k-2}, \quad f_1(x) = (\alpha+\beta)/\alpha x$$

のときである．$\beta = 0$, $k = 2$, $\delta = \alpha$ とすれば

$$z'' + x^{-1}z' - z = 0$$

となり，これは $I_0(x)$（変形 Bessel 函数）の方程式である．
x を ix におきかえれば，つぎの連分数展開をうる．

(19) $$\frac{J_1(x)}{J_0(x)} = -\frac{J_0'(x)}{J_0(x)} = \frac{x|}{|2} - \underset{n=2}{\overset{\infty}{\Phi}} \frac{x^2|}{|2n} = \frac{x|}{|2} - \underset{n=1}{\overset{\infty}{\Phi}} \frac{x^2|}{|2n+2}$$

Bessel 函数の漸化式により，(19) は一般に

(20) $$\frac{J_m(x)}{J_{m-1}(x)} = \frac{x|}{|2m} - \underset{n=1}{\overset{\infty}{\Phi}} \frac{x^2|}{|2m+2n}$$

と拡張することができる．(20) を $J_m(x)$ の数値計算に応用することは，別の機会にのべた（[2] 参照）．

Gauss の超幾何微分方程式

$$x(1-x)z'' + [c-(a+b+1)x]z' - abz = 0$$

は，(18) の形にすると，

$$x(1-x)y' - ab + [c-(a+b+1)x]y + x(1-x)y^2 = 0$$

となる．これは $y = 1/u$ とおきかえると

$$(21)\quad x(1-x)u' - [c-(a+b+1)x]u + abu^2 = x(1-x)$$

となり，(2)で $\eta=-1$, $\eta'=0$, $\beta=-c$, $\beta'=a+b+1$, $\gamma=ab$, $\delta=1$ としたものに相当する．(21)の連分数展開と，超幾何函数の公式を組み合わせれば，最終的には，連分数

$$(22)\quad \frac{F(a,b,c;x)}{F(a,b+1,c+1;x)} = 1 - \frac{a(c-b)x/c\,|}{|\,c+1} + \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(b+n)(c-a+n)x\,|}{|\,c+2x} - \frac{(a+n)(c-b+n)x\,|}{|\,c+2n+1}\right]$$

をうる．(22)は $[1,\infty)$ に cut を入れた平面で収束する．もっとも(22)は直接に F の漸化式から出した方が早い．

(22)の極限として，Kummer の合流型超幾何函数 $\Phi(a,c;x)$ に対する公式

$$(23)\quad \frac{\Phi(a,c;x)}{\Phi(a+1,c+1;x)} = 1 - \frac{(c-a)x/c\,|}{|\,c+1} + \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(a+n)\,|}{|\,c+2n} - \frac{(c-a+n)x\,|}{|\,c+2n+1}\right]$$

をうる．ここで $a=0$ とすれば，少しかきかえて

$$(24)\quad \Phi(1,c;x) = \frac{1\,|}{|\,1} - \frac{x\,|}{|\,c} + \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx\,|}{|\,c+2n-1} - \frac{(c-1+n)x\,|}{|\,c+2n}\right]$$

をうる．これは本質的には Prym の函数（不完全ガンマ函数）である．この特別な場合として，積分指数函数や確率積分の連分数展開がえられる．実用上では，漸化式でまとめかえ，奇数項と偶数項を同一の形で表現して，

$$
(25)\quad x^{-c}e^{x}\int_{0}^{x} x^{c-1}e^{-x}\,dx = c^{-1}\Phi(1,\, c+1;\, x)
$$
$$
= \frac{1|}{|c} - \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1+c)x|}{|n+c+x}
$$

の形にした方がよい。(25) はまた Prym の函数の整級数展開式に，商差法（本質的に [3] の末尾にある方法と同じ）を適用して，連分数にかき直しても，えられる。

§6. むすび

以上は昔からうまくゆくことが既知の場合である。この手法が Riccati 型，すなわち動く特異点をもたない方程式（そして一般解が積分定数の一次分数式になる方程式）にうまく適用されるのは，ある意味では自然に思われる。同様の手法を他の方程式に拡張するとすれば，さしあたっての目標は，動く特異点をもたない2階の Painlevé の方程式あたりであろう。少し手をつけてみたが，係数の漸化式が複雑で，きれいな一般項がでなかった。しかし，数値計算の立場では，漸化式がえられれば，数値的に計算すればすむ場合もある。問題はむしろその種の方程式の解として実用上に有用な函数がどの位あるかであろう。——逆に純粋数学の立場では，実用か否かは別として，とにかく連分数展開のうまくでる函数があればよいのであろうが。——

文　献

[1] A.N.Khovanskii (P.Wynn 訳), The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory, Noordhoff, 1963.

[2] S.Hitotumatu, On the numerical computation of Bessel functions through continued fraction, Comm. Math. Univ. St. Pauli, 16(1968), 89-113.

[3] O.Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Teubner, 1924 (Reprint, Chelsea 1965).